

Flux de Hamilton-Ricci en varietats tridimensionals

JOAN PORTI

Mais cette question nous entrainerait trop loin.

H. Poincaré, 1904

Resum Expliquem els treballs de Perelman, que ha resolt la conjectura de Thurston, i en particular la conjectura de Poincaré, mitjançant el flux de la curvatura de Ricci introduït per Hamilton.

Paraules clau: flux de Ricci, varietat de dimensió tres.

Classificació MSC2000: 53.

1 Introducció

A final del segle XIX i principi del XX, Poincaré publicà una sèrie d'articles de gran influència per al desenvolupament posterior de la topologia. En particular, l'article «Cinquième complément à l'analysis situs» (1904) acaba plantejant la pregunta [30]:

L'esfera és l'única varietat tridimensional tancada que té grup fonamental trivial?

La resposta afirmativa a aquesta qüestió es coneix com a *conjectura de Poincaré*. Ell, però, no ho conjecturà mai, en realitat va escriure «mais cette question nous entrainerait trop loin». Ja que van caldre cent anys i la solució d'una conjectura molt més àmplia —la de geometrització— per respondre, la seva clarividència en aquesta qüestió és innegable.

La conjectura de Poincaré fou un motor per a la recerca en topologia durant tot el segle XX. L'activitat en topologia, juntament amb la interacció amb la geometria de Riemann i les equacions d'evolució, en permeteren la solució final. Entre els resultats més rellevants, cal citar el de H. Kneser [21] el 1928 i els de

W. Jaco i P. Shalen [17] i K. Johansson [18] el 1979 sobre les descomposicions canòniques de varietats, que explicarem més endavant. El treball de W. P. Thurston durant la dècada dels setanta el va portar a enunciar la conjectura de geometrització [39], que afirma que cada tros de la descomposició canònica és geomètric, és a dir, admet una mètrica de Riemann localment homogènia. Cal dir que els treballs de Thurston revolucionaren el camp de les varietats tridimensionals, ja que introduïen la geometria com a eina fonamental.

A principis de la dècada dels vuitanta, R. S. Hamilton féu una contribució substancial en provar que la conjectura de geometrització és certa per varietats amb una mètrica de curvatura no negativa, introduint el flux de Ricci a l'espai de mètriques [12, 13]. El nom del flux ve del fet que és la solució d'una equació d'evolució que fa intervenir la curvatura de Ricci. Hamilton va desenvolupar un programa per provar la conjectura de geometrització sencera [15], però aquest flux té unes singularitats massa complicades, que no li permeteren tancar-lo. G. Perelman va resoldre el problema introduint la noció de κ -no enfonsament i certs funcionals en l'espai de mètriques [28], alguns d'aquests amb interpretacions físiques, com sol passar en geometria.

Aquest article intenta oferir una breu visió de tots aquests treballs. El lector interessat també pot consultar els textos [2, 5, 22, 25].

L'article està dividit en tres parts. Fins a la secció 3, es comenta la conjectura de geometrització i algunes propietats mètriques que tenen a veure amb la topologia i seran rellevants més endavant. A la segona part, de la secció 4 a la 6, s'exposen els treballs de Hamilton, i en la tercera, de la secció 7 en endavant, s'expliquen les contribucions de Perelman.

2 Varietats tridimensionals

En aquesta secció s'explica breument la conjectura de geometrització. L'autor no deixa escapar l'avinentsa per suggerir un article propi dedicat a la conjectura, publicat al *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* [31].

2.1 Descomposició topològica i antecedents històrics

La suma connexa de dues varietats consisteix a treure'n una bola oberta i enganxar-les per les esferes de la vora (figura 1).

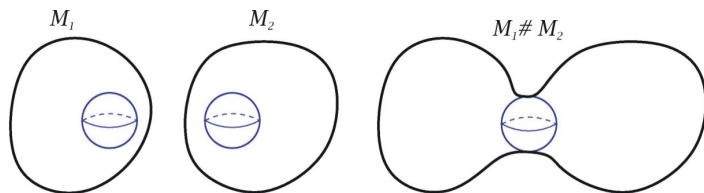


FIGURA 1: Esquema de la suma connexa.

La suma connexa amb una esfera S^n no canvia la varietat, perquè una esfera és el resultat d'unir dues boles per la vora. Diem que una varietat és *primera* si no és suma connexa de dues varietats diferents de l'esfera.

El primer pas per a la descomposició canònica el demostrà Kneser, treballant amb les triangulacions de les varietats [21].

1 TEOREMA (KNESER 1928) *Tota varietat tridimensional tancada, orientable i triangulada M^3 es descompon com a suma connexa $M^3 = M_1 \# \dots \# M_k$ de manera que cada M_i és primera. A més, els factors M_i són únics, llevat d'homeomorfismes combinatoris.*

Posteriorment, durant els anys trenta, H. Seifert [34] va estudiar i classificar una família de varietats, actualment conegudes per *varietats fibrades de Seifert*.

Una *fibració de Seifert* és una partició en cercles que és una fibració (localment un producte) excepte en un nombre finit de fibres singulars, on té el següent model local. Considerem el producte $D^2 \times [0, 1]$ fibrat per intervals, i identifiquem $D^2 \times \{0\}$ amb $D^2 \times \{1\}$ mitjançant una rotació d'ordre finit. La fibració per intervals indueix una partició per cercles del tor sòlid, que és una fibració excepte a les fibres singulars $\{0\} \times S^1$, on $\{0\}$ denota el centre de D^2 .

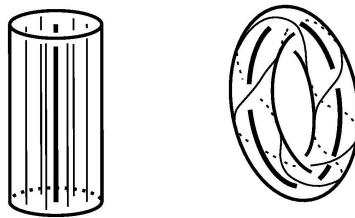


FIGURA 2: Model per a les fibres singulars: enganxem les cares superiors i inferiors per una rotació d'angle $2\pi \frac{p}{q}$, amb $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

La dècada del 1950 al 1960 fou una nova etapa amb aportacions rellevants en la conjectura de geometrització. Deixem Alemanya, Kneser i Seifert, pels Estats Units, on, de manera independent, E. Moise [23] i R. Bing [4] demostraren que tota varietat tridimensional admet una triangulació, que és única, llevat d'equivalència. Això permeté aplicar el resultat de Kneser a les varietats topològiques. Pocs anys més tard, J. Munkres [27] provà que les varietats tridimensionals admeten una estructura diferenciable, també única llevat de difeomorfismes. Això ens permet treballar sense problema en la categoria diferenciable, i aplicar les tècniques de geometria i d'equacions d'evolució. Aquests resultats de triangulabilitat i diferenciabletat que semblen intuïtius són certs també en dimensió dos però són falsos en dimensió superior.

Els anys setanta, W. Jaco i P. Shalen i K. Johannsson *descobriren* de manera independent l'anomenat *teorema de la subvarietat de Seifert maximal*

o *característica*. La versió que en donem és la que ens convé més per a la geometrització.

2 TEOREMA (JACO-SHALEN I JOHANNSON 1979) *Sigui M^3 una varietat tridimensional primera, tancada i orientable. Existeix una família de tors incompressibles encaixats i disjunts T_1^2, \dots, T_k^2 que tallen M^3 en peces que són o bé fibrades de Seifert, o bé simples. La família de tors és canònica si és mínima amb la propietat anterior.*

Explicuem algunes definicions. *Canònica* vol dir única llevat d'isotopia: donades dues famílies de tors mínimes existeix un homeomorfisme que porta una a l'altra i aquest homeomorfisme es pot deformar per una família contínua d'homeomorfismes fins a la identitat (això és la *isotopia*). Un tor T^2 s'anomena *incompressible* si el grup fonamental s'injecta $\pi_1(T^2) \hookrightarrow \pi_1(M^3)$. Una varietat M^3 s'anomena *simple* si no és fibrada de Seifert i tot subgrup $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} < \pi_1(M)$ correspon a un subgrup de la vora ∂M . La vora ∂M pot ser buida o una unió disjunta de tors T^2 , ja que hem tallat al llarg de tors.

Aquesta descomposició es designa per les sigles JSJ.

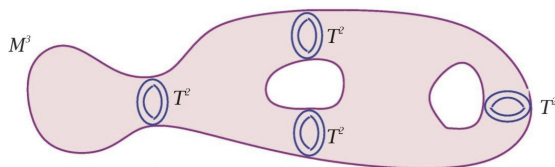


FIGURA 3: Esquema de la descomposició de JSJ en tors.

2.2 Geometrització

Després del teorema de Jaco-Shalen i Johannson, les varietats que quedaven per comprendre eren les que anomenaven *simples* (posteriorment les van anomenar atoroidals). La conjectura de Thurston, ara demostrada, es pot enunciar com segueix:

3 CONJECTURA (THURSTON) Les varietats simples són hiperbòliques.

Una varietat s'anomena *hiperbòlica* si el seu interior admet una mètrica de Riemann completa de curvatura constant -1 .

Thurston demostrà la conjectura en certs casos, a més de donar mètodes de construccions de varietats hiperbòliques, de les quals hi havia pocs exemples fins aleshores.

La conjectura de geometrització inclou la de Poincaré: una varietat amb grup fonamental trivial no pot ser hiperbòlica ni contenir tors incompressibles, per tant, ha de ser fibrada de Seifert. Segons ja havia demostrat el mateix Seifert, l'única varietat de Seifert amb grup fonamental trivial és l'esfera S^3 .

La conjectura de geometrització es coneix millor de la manera següent, que és molt elegant:

4 CONJECTURA (THURSTON, SEGONA FORMULACIÓ) Tota varietat compacta de dimensió tres es descompon de manera canònica en peces geomètriques.

Diem que una varietat es *geomètrica* si el seu interior admet una mètrica localment homogènia. Una mètrica és *localment homogènia* si dos punts qualssevol tenen un entorn isomètric, és a dir, que les propietats mètriques d'un entorn són les mateixes per a cada punt (però les globals no necessàriament). Les mètriques de curvatura constant són un cas particular de mètriques localment homogènies.

Evidentment, la descomposició canònica vol dir fer primer la de Kneser per suma connexa, i després la de Jaco-Shalen i Johannson per tors.

L'equivalència entre les dues formulacions de la conjectura ve de la proposició següent:

5 PROPOSICIÓ Una varietat de dimensió tres tancada és geomètrica si i només si és una dels següents:

- hiperbòlica,
- fibrada de Seifert,
- un fibrat sobre el cercle S^1 amb fibra un tor T^2 .

Observem que si un fibrat en tors sobre el cercle no és fibrat de Seifert, aleshores el tor de la fibra ens dona la descomposició JSJ, ja que en tallar obtenim el producte d'un tor amb un interval.

Aquesta proposició utilitza la classificació de mètriques homogènies en varietats tridimensionals feta per L. Bianchi l'any 1897 [3], que tenia motivacions cosmològiques.

2.3 Exemples

EXEMPLE La mètrica usual de l'esfera S^3 és homogènia, i l'esfera admet diverses fibracions de Seifert. La més coneguda, però, és la fibració de Hopf, que no té cap fibra singular. Si veiem S^3 com l'esfera unitat de \mathbf{C}^2 ,

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1\},$$

la fibració de Hopf està formada per les òrbites de $S^1 = \{\omega \in \mathbf{C} \mid \omega \bar{\omega} = 1\}$ per multiplicació per l'esquerra. Altrament dit, les fibres són els cercles $(e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$ parametrizats per $\theta \in [0, 2\pi]$, i l'espai d'òrbites és la recta projectiva complexa \mathbf{CP}^1 .

EXEMPLE Considerem ara els espais lenticulars $L(p, q)$, on $p, q \in \mathbf{Z}$ són enters primers entre si, $p \geq 2$. Seguint la notació de l'exemple anterior, $L(p, q)$ és el quocient de S^3 per l'acció del grup cíclic d'ordre p engendrat per la transformació

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2).$$

Aquesta acció clarament preserva la mètrica de S^3 , per tant, indueix una mètrica de curvatura constant en $L(p, q)$. A més, l'acció commuta amb la multiplicació de la fibració de Hopf, i envia òrbites a òrbites. En realitat permuta òrbites, menys dues que són invariants: $\{(0, z_2) \mid z_2 \in S^1\}$ i $\{(z_1, 0) \mid z_1 \in S^1\}$. Això implica que $L(p, q)$ admet una fibració de Seifert amb dues òrbites singulars d'ordre p .

Es pot demostrar que tots els quocients de S^3 per a un subgrup finit de $SO(4)$ (que tenen una mètrica localment homogènia de curvatura constant) admeten una fibració de Seifert, induïda per la fibració de Hopf [33].

EXEMPLE El tor $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ admet una mètrica homogènia de curvatura constant zero i diverses fibracions en cercles.

EXEMPLE Considerem $F_g \times S^1$, el producte d'una superfície tancada de gènere $g \geq 1$ amb el cercle. Com que la superfície F_g admet una mètrica de curvatura constant, la mètrica del producte $F_g \times S^1$ és localment homogènia (òbviament, és fibrada de Seifert).

EXEMPLE Considerem el grup de Heisenberg:

$$Heis = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

amb una mètrica invariant per multiplicació per l'esquerra i el subgrup

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El quocient $\Gamma \backslash Heis$ admet una mètrica localment homogènia, induïda per la mètrica de $Heis$. A més la projecció a les coordenades (x, y) dóna una fibració per cercles sobre el tor

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \rightarrow & Heis/\Gamma & \rightarrow & T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}.$$

EXEMPLE El nus de vuit (figura 4) és l'exemple més senzill de nus (amb complement) hiperbòlic. Primer de tot pensem que l'espai ambient \mathbf{R}^3 , el completem afegint un punt a l'infinit i obtenim l'esfera S^3 . Si a l'esfera li traiem el nus, obtenim una varietat no compacta, que és hiperbòlica (amb mètrica de curvatura constant -1) i té volum finit.

La primera demostració de la hiperbolicitat de l'exterior del nus de vuit la va donar R. Riley [32], tot i que Thurston [38] en donà una de més senzilla que esdevingué molt més coneguda.

Una cirurgia de Dehn en un nus a S^3 consisteix a treure'n un entorn (homeomorf a un tor sòlid $D^2 \times S^1$) i a tornar a enganxar un tor sòlid $D^2 \times S^1$ però canviant la identificació de la vora $\partial D^2 \times S^1 \cong T^2$. Aquest procés permet construir una infinitat de varietats diferents, i Thurston demostrà que totes menys un nombre finit són hiperbòliques.

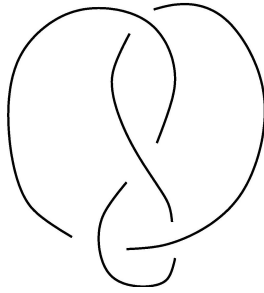
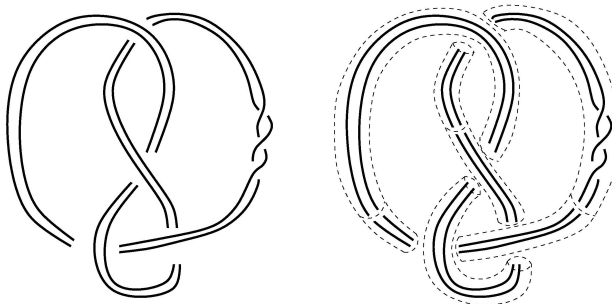


FIGURA 4: El nus de vuit.

EXEMPLE L'exemple següent també és l'exterior d'un nus a S^3 i té una descomposició de JSJ no trivial. De fet, el nus de la figura 5 és un satèl·lit, perquè està contingut en un entorn tubular del nus de vuit. La vora d'aquest entorn tubular és un tor T^2 que dóna la descomposició JSJ de l'exterior del nus a S^3 . A fora de T^2 , tenim precisament l'exterior del nus de vuit, que és hiperbòlic. A dins de T^2 , el que tenim és una varietat de Seifert, car podem interpretar aquesta part com el resultat de treure d'un tor sòlid la fibra d'un model com a la figura 3.

FIGURA 5: Un satèl·lit del nus de vuit. A la dreta dibuixem el tor T^2 de la descomposició de JSJ.

3 Radi d'injectivitat, curvatura i topologia

En la conjectura de geometrització, distingim essencialment les varietats de Seifert de les hiperbòliques. L'objectiu d'aquesta secció és veure les propietats mètriques que ens poden fer decidir si una varietat és d'un tipus o d'un altre. Les propietats que ens interessin són la curvatura, el radi d'injectivitat i el volum.

Donada una varietat de Riemann M i un punt $x \in M$, el seu *radi d'injectivitat* es pot pensar com

$$\text{inj}(x) = \sup\{r > 0 \mid B(x, r') \text{ és homeomorfa a una bola topològica } \forall 0 < r' < r\}.$$

Cal aclarir que la definició de radi d'injectivitat és més complicada (es demana que l'aplicació exponencial sigui un difeomorfisme). En aquest article, ens quedarem amb aquesta noció més intuïtiva.

Per a un radi prou petit, les boles mètriques a la varietat són homeomorfes a una bola mètrica de \mathbf{R}^n . Si anem augmentant el radi de la bola, això pot fallar: $\text{inj}(x)$ és el primer valor pel qual la bola mètrica deixa de ser homeomorfa a una bola de \mathbf{R}^n . La qualitat $\text{inj}(x)$ també és la meitat de la longitud del llaç geodèsic més curt centrat en un punt (és infinit si aquest llaç no existeix).

Més endavant definirem amb precisió les diferents nocions de curvatura; de moment recordarem la idea de *curvatura seccional*. Suposarem coneguda la noció de curvatura de Gauss d'una superfície. Donats un punt x d'una varietat i un pla tangent a x , se'ls associa una superfície que consisteix en la unió de totes les geodèsiques que surten del punt x i són tangents al pla donat. La curvatura de Gauss d'aquesta superfície és l'anomenada *curvatura seccional* del pla tangent a x . De vegades s'utilitza la notació $\text{sec}(x)$ sense especificar el pla, quan per exemple volem donar una cota per a la curvatura seccional de tots els plans tangents a x .

En certes situacions es pot utilitzar el volum per controlar el radi d'injectivitat. Per exemple, el lema de l'hèlix de Cheeger [7] ens relaciona el volum i el radi d'injectivitat, suposant que la curvatura i el diàmetre estan acotats.

6 LEMA *Donada una constant D_0 , per a una varietat de Riemann M^3 amb $\text{diam}(M^3) \leq D_0$ i $|\text{sec}| \leq 1$, una cota per $\text{vol}(M^3)$ equival a una cota per inj en tot punt de M^3 .*

3.1 Teoria de Cheeger-Gromov per a enfonsaments

El radi d'injectivitat pot esdevenir arbitràriament curt mitjançant una homotècia, però aleshores la *curvatura seccional* $\text{sec}(x)$ pot esdevenir arbitràriament gran. Estem interessats en els *enfonsaments*: quan $\text{inj}(x)$ esdevé arbitràriament petit i $\text{sec}(x)$ està acotada.

Enunciem la versió tridimensional del teorema de Cheeger i Gromov [8, 9].

7 TEOREMA (CHEEGER-GROMOV 1986-1990) *Existeix una constant universal $\varepsilon > 0$ tal que, per a cada varietat de Riemann M^3 de dimensió tres, el subconjunt*

$$\{x \in M \mid \text{inj}(x) \leq \varepsilon \text{ i } |\text{sec}(x)| \leq 1\}$$

és una varietat de Waldhausen.

A més, per a tot $\varepsilon > 0$, qualsevol varietat de Waldhausen admet una mètrica amb $|\text{sec}(x)| \leq 1$ i $\text{inj}(x) \leq \varepsilon$ en cada punt.

Utilitzem la notació $|\sec(x)| \leq 1$ per dir que la curvatura seccional en tots els plans tangents al punt x està majorada per 1 en valor absolut.

8 DEFINICIÓ Una varietat de Waldhausen és una varietat tridimensional formada per la unió de varietats de Seifert al llarg de la seva vora.

Cal observar que els tors d'aquesta definició no són necessàriament els tors de la descomposició JSJ (la descomposició del teorema 2), perquè poden no ser incompressibles (*incompressibles* vol dir que el grup fonamental s'injecta) o perquè la varietat podria ser una suma connexa. Un teorema de Waldhausen [40] de 1967 ens assegura que una tal varietat és suma connexa de varietats que només tenen trossos fibrats de Seifert en la descomposició de JSJ.

3.2 Lema de Margulis

El lema de Margulis ens descriu la part prima (amb radi d'injectivitat petit) de les varietats i ens garanteix un mínim universal per al radi d'injectivitat en almenys un punt de cada varietat hiperbòlica.

Per a una constant $\varepsilon > 0$, definim la part ε -prima d'una varietat hiperbòlica com:

$$M^-(\varepsilon) = \{x \in M \mid \text{inj}(x) < \varepsilon\}.$$

El seu complement $M^+(\varepsilon) = M \setminus M^-(\varepsilon)$ s'anomena part ε -gruixuda.

La versió que enunciem del lema de Margulis es pot consultar a [38].

9 TEOREMA *Existeix una constant universal $\mu > 0$ tal que, per a tot $0 < \varepsilon \leq \mu$ i tota varietat hiperbòlica tridimensional M , $M^+(\varepsilon) \neq \emptyset$ i cada component de $M^-(\varepsilon)$ és fibrat de Seifert.*

Aquestes descripcions de la part gruixuda i de la part prima ens guiaran quan tinguem una mètrica per buscar la part hiperbòlica i la part fibrada de Seifert en la descomposició de JSJ.

4 Flux de Ricci

Abans de la definició del flux, recordem les diferents nocions de curvatura, començant pel tensor $R(\cdot, \cdot)$. Donats tres camps X, Y i Z en una varietat, $R(X, Y)Z$ és el camp:

$$R(X, Y)Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

La curvatura de Ricci n'és la traça

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Traça}(Z \mapsto R(X, Z)Y),$$

i, per tant, una simplificació. La curvatura de Ricci és un tensor simètric dues vegades covariant (del mateix ordre que la mètrica). És a dir, en cada punt p de la varietat M , Ric és una forma bilineal simètrica de l'espai tangent a M en p :

$$\begin{aligned} T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbf{R} \\ (u, v) &\mapsto \text{Ric}(u, v). \end{aligned}$$

La curvatura escalar R és la traça de la curvatura de Ricci, i ja no és un tensor, sinó una funció, per tant, molt més senzilla de manipular i d'interpretar.

A més tenim les curvatures seccionals. Donats dos vectors ortonormals u i v , la curvatura seccional en la direcció del pla que generen $\langle u, v \rangle$ és:

$$\text{sec}(\langle u, v \rangle) = g(R(u, v)v, u),$$

on g denota la mètrica de Riemann.

En dimensió tres, tant la curvatura seccional com la curvatura de Ricci determinen el tensor de curvatura. Això no és cert en dimensions superiors per a la curvatura de Ricci.

4.1 El flux

Definim el flux de Ricci com la solució de l'equació d'evolució

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric},$$

on g denota la mètrica de Riemann i Ric, el seu tensor de Ricci corresponent. Es tracta d'una equació en derivades parcials en l'espai de tensors de la varietat que són dues vegades covariants i simètrics. Aquest tipus d'equacions s'anomena *d'evolució*, ja que la mètrica de la varietat anirà canviant al llarg del temps segons aquesta equació.

En coordenades (x^1, \dots, x^n) , l'equació s'escriu:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2 R_{ij},$$

on $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ i $R_{ij} = \text{Ric}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. Podríem intentar escriure el terme R_{ij} en funció dels g_{ij} i les seves derivades parcials, però ens quedaria un sistema massa complicat.

Observem que el flux és invariant per a difeomorfismes: si $\phi : M \rightarrow M$ és un difeomorfisme i g_t satisfà $\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}$, llavors

$$\frac{\partial \phi^* g}{\partial t} = -2 \text{Ric}$$

perquè si Ric_g és el tensor de Ricci de g , es compleix $\text{Ric}_{\phi^* g} = \phi^* \text{Ric}_g$.

4.2 Existència i unicitat en temps curt

El primer pas per aplicar la teoria és demostrar l'existència i la unicitat per temps positiu.

10 TEOREMA (EXISTÈNCIA I UNICITAT EN TEMPS CURT) *Si M és una varietat compacta amb mètrica g_0 , aleshores l'equació del flux de Ricci amb condició inicial g_0 té una única solució definida en temps $t \in [0, T)$ per cert $T > 0$.*

Aquest teorema d'existència no és gens trivial, i en molts casos no tenim solucions per a temps negatiu. De fet, la mètrica esdevé analítica immediatament (per a tot temps $t > 0$) i, per tant, si comencem amb una mètrica no analítica està clar que no podem anar endarrere en el temps.

L'existència i la unicitat per temps curt va ser demostrada primer per Hamilton [12], mitjançant un teorema de la funció inversa de Nash-Moser, i poc després DeTurck [11] va donar-ne una demostració molt més senzilla trencant la invariància per difeomorfismes.

S'ha demostrat l'existència i la unicitat per varietats no compactes sempre que les mètriques siguin completes i tinguin curvatura acotada [6, 35], condicions que a més de ser suficients són necessàries.

4.3 Heurística

Per entendre per què aquesta equació pot ser útil per la conjectura de geometrització, observem que en coordenades harmòniques (*i. e.* $\Delta(x^i) = 0$) l'equació del flux de Ricci s'escriu:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta(g_{ij}) + Q_{ij}(g^{-1}, \frac{\partial g}{\partial x})$$

on $\Delta(g_{ij})$ és el laplacià de la funció escalar g_{ij} (no el tensor) i Q_{ij} és una expressió quadràtica. Aquesta és una equació de *reacció-difusió*. El terme del laplacià és el de *difusió*, la seva contribució a l'equació s'interpreta que tendeix a repartir la mètrica de manera uniforme. És un comportament semblant al de l'equació de la calor: en un cos on hi ha zones fredes i calentes, la temperatura flueix de les parts calentes a les fredes per tendir a uniformitzar-se. El terme quadràtic Q_{ij} és el de *reacció*, perquè s'entén que contribueix a crear singularitats, per analogia amb les equacions que descriuen certes reaccions químiques. En conseqüència podríem pensar que l'heurística del programa de Hamilton és la següent

O bé $g(t)$ convergeix cap a una mètrica localment homogènia o bé crea singularitats que corresponen a una descomposició canònica.

Evidentment, les coses no seran tan senzilles. Hi haurà singularitats que donaran sumes connexes però potser sumes topològicament trivials (amb esferes). A més, les parts de Seifert en la descomposició de Jaco-Shalen i Johansson s'enfonsaran d'una manera semblant a la de Cheeger-Gromov (teorema 7), però amb diferents cotes de curvatura.

4.4 Exemples

Comencem amb l'exemple més senzill possible: suposem que la mètrica inicial g_0 té curvatura seccional constant K , la qual cosa vol dir que el tensor de Ricci és un múltiple constant del tensor mètric:

$$\text{Ric}_{g_0} = (n - 1)K g_0,$$

on n és la dimensió. Aleshores, sabent l'existència i la unicitat de solucions, ens restringim a mètriques homotètiques

$$g_t = f(t)g_0$$

i trobem solucions d'aquest tipus. Com que el tensor de Ricci és invariant per a homotècies, $\text{Ric}_{g_t} = \text{Ric}_{g_0} = (n-1)K g_0$, l'equació esdevé:

$$f' = -2(n-1)K,$$

per tant, la solució és

$$g_t = (1 - 2K(n-1)t)g_0.$$

Tenim tres tipus de comportament segons el signe de la curvatura seccional K inicial:

- Per a $K = 0$, la solució és constant.
- Per a $K < 0$, la solució s'expandeix durant un temps infinit, i la curvatura s'acosta a zero.
- Per a $K > 0$, la solució es contrau fins a col·lapsar en un temps finit $T = \frac{1}{2K(n-1)}$, i la curvatura tendeix a infinit.

Els solitons ens donen una altra família d'exemples:

11 DEFINICIÓ Una solució g_t és un *solitó* si

$$g_t = \lambda_t \phi_t^* g_0,$$

on ϕ_t és un difeomorfisme i λ_t és un paràmetre constant a la varietat, ambdós depenents de t .

Un cas particular el tenim quan ϕ_t és el grup uniparamètric associat a un camp gradient (∇f per a una funció f), és a dir,

$$\frac{d\phi_t}{dt}(p) = \nabla f(\phi_t(p)).$$

En aquest cas, diem que g_t és un *solitó gradient* i l'equació del flux esdevé equivalent a una equació en temps zero:

$$\text{Ric} + \text{Hess}(f) + c g_0 = 0,$$

on $c = \lambda'(0)/2$ és una constant. En particular, quan $c = 0$, la constant és $\lambda_t \equiv 1$.

EXEMPLE El solitó del cigar és la mètrica de \mathbf{R}^2 :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

En coordenades polars, la mètrica del solitó del cigar és

$$g = dr^2 + \tanh^2 r d\theta^2.$$

Observem que asimptòticament tendeix a la mètrica del cilindre, perquè $\tanh r \rightarrow 1$ quan $r \rightarrow \infty$, i la mètrica del cilindre s'escriu $dh^2 + d\theta^2$, on h és l'alçada i θ , el paràmetre circular. La curvatura seccional és $\frac{2}{\cosh^2 r}$ i, per tant, $\text{Ric} = \frac{2}{\cosh^2 r}g$. Fàcilment es comprova que $f = -2 \log \cosh r$ satisfà l'equació del solitó de camp gradient

$$\text{Ric} + \text{Hess}(f) = 0.$$

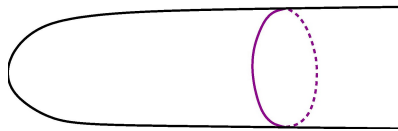


FIGURA 6: Solitó del cigar. Ens interessarà el seu producte amb \mathbf{R} , que és tridimensional.

EXEMPLE El cilindre $S^2 \times \mathbf{R}$ amb la mètrica estàndard (producte de mètriques usuals a S^2 i \mathbf{R}) és un solitó contractant, perquè la curvatura constant i positiva de S^2 es contrau pel flux. La mètrica col·lapsa en la direcció de S^2 en un temps finit.

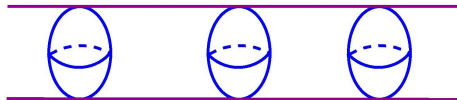


FIGURA 7: El cilindre. El factor S^2 es representa verticalment.

Els dos exemples tenen un paper molt diferent en el *programa de Hamilton* per a la demostració de la conjectura, en particular per a l'anàlisi de les singularitats. El cilindre i el producte del cigar amb \mathbf{R} són exemples de solucions del flux de Ricci amb curvatura no negativa, completes i definides des de temps $-\infty$. Hamilton va provar que les solucions amb aquestes propietats apareixien com a límits de singularitats del flux de Ricci en varietats tridimensionals, després de fer homotècies a la successió de temps del flux que s'acostaven a la singularitat.

Els cilindres són el model apropiat, el que correspondrà a una suma conexas de varietats. Per evitar el producte del cigar amb \mathbf{R} , Perelman introduí la noció de κ -enfonsament, que explicarem més endavant. D'aquesta manera, Perelman excloué les singularitats que Hamilton no sabia com evitar.

5 Evolució de la curvatura

L'evolució de la curvatura té un paper central en l'estudi del comportament del flux de Hamilton-Ricci. Començarem per la curvatura escalar, que es defineix com la traça de la curvatura de Ricci: $R = \text{tr}(\text{Ric}) = R_{ij}g^{ij}$.

12 LEMA *L'evolució de la curvatura escalar durant el flux de Hamilton-Ricci és:*

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + |\text{Ric}|^2.$$

Aquest tipus d'equació ens permet aplicar principis del màxim. Per exemple, el *principi feble del màxim* aplicat a aquesta equació ens dóna:

13 COROLLARI *En una varietat compacta M , $\min_M R$ és creixent (potser no estrictament).*

En realitat, apliquem el principi al mínim de R en M per a un temps donat t , que denotem $R_{\min}(t)$. Com que en el mínim $\Delta R \geq 0$, l'equació d'evolució de la curvatura ens dóna

$$\frac{\partial R_{\min}(t)}{\partial t} \geq |\text{Ric}|^2 \geq 0,$$

i en conseqüència $R_{\min}(t)$ creix amb el temps.

El *principi fort del màxim* a la mateixa equació ens diu:

14 COROLLARI *En una varietat compacta M , si per a un temps $t = 0$, $R \geq 0$ a tot arreu i $R > 0$ per a algun $x \in M$, aleshores $R > 0$ a tot arreu quan $t > 0$.*

Els dos principis del màxim també s'apliquen a les altres curvatures. Per fer-ho cal una versió tensorial, és a dir, localment en diverses variables. Ens centrarem en el cas tridimensional.

5.1 Evolució de la curvatura en dimensió tres

Quan la dimensió de la varietat és tres, l'operador de curvatura és més fàcil de descriure que en el cas de dimensió superior. Denotem $\Lambda^2 TM = TM \wedge TM$ el producte exterior de l'espai tangent a M amb si mateix. En el cas tridimensional, $\Lambda^2 TM^3$ és un fibrat trivial de dimensió tres. Les propietats de simetria del tensor de curvatura ens diuen que, en cada $x \in M$, la forma bilineal

$$\begin{aligned} \Lambda^2 T_x M \oplus \Lambda^2 T_x M &\rightarrow \mathbf{R} \\ (u \wedge v, w \wedge t) &\mapsto g(R(u, v)t, w) \end{aligned}$$

està ben definida i és simètrica. L'operador de curvatura n'és l'endomorfisme associat $\Lambda^2 TM \rightarrow \Lambda^2 TM$ (equipem $\Lambda^2 TM$ amb una mètrica induïda per g , la mètrica de TM).

En dimensió tres, l'operador de curvatura diagonalitza (en una base ortonormal) de la forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

on els α_i són funcions en M . Els valors $\alpha_i/2$ són curvatures seccionals, la curvatura de Ricci és:

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{pmatrix}$$

i la curvatura escalar $R = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Les equacions d'evolució dels α_i són

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \Delta\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha'_2 = \Delta\alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_1 \\ \alpha'_3 = \Delta\alpha_3 + \alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_2. \end{cases}$$

Si els apliquem el principi feble del màxim per tensors obtenim:

15 COROLLARI *Per varietats compactes tridimensionals, $\text{Ric} \geq 0$ i $\text{sec} \geq 0$ són invariants pel flux.*

Per les curvatures seccionals, com que si $\alpha_i \geq 0$ aleshores $\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3 \geq 0$, el mínim dels α_i augmenta. De la mateixa manera, l'equació per $\alpha'_1 + \alpha'_2$ es reescriu com:

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 = \Delta(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)[(\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3)] + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

i podem aplicar el principi del màxim per a $\text{Ric} \geq 0$ (és a dir, quan Ric és una forma bilineal semidefinida positiva en cada punt).

Les estimacions de Hamilton-Ivey [15, 16] són un altre exemple de l'aplicació del principi del màxim per tensors. Sigui $\phi: [-1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ la inversa de $x \mapsto \log x - x$.

16 TEOREMA (ESTIMACIONS DE HAMILTON-IVEY) *Les condicions*

$$R \geq -1 \quad i \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq -\phi(R)$$

són invariants pel flux de Ricci.

Observem que, donada una mètrica qualsevol, les condicions del teorema es poden satisfer si li apliquem una homotècia adequada. Per tant, a partir d'ara, suposarem sempre que la mètrica inicial del flux les compleix (i direm que la condició inicial està *normalitzada*). Com que $R = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, en deduïm:

17 COROLLARI *Per a una mètrica en una varietat tridimensional que evoluciona amb el flux i té condició inicial normalitzada, es compleix, en cada punt i cada temps:*

$$R + 2\phi(R) \geq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq -\phi(R).$$

Aquest corollari ens diu que amb la curvatura escalar R controlarem tota la curvatura en les explosions (quan la curvatura sigui molt gran).

Concretament, per a $R \gg 1$ normalitzarem la mètrica per tenir curvatura escalar 1, de manera que els nous valors propis de la curvatura $\bar{\alpha}_i = \alpha_i/R$ compliran:

$$1 + \frac{2\phi(R)}{R} \geq \bar{\alpha}_i \geq -\frac{\phi(R)}{R}$$

És important observar que, per construcció, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\phi(y)}{y} = 0$. A la secció 6.4 ens interessarem per les explosions: límits de mètriques per les quals $R \rightarrow \infty$, normalitzades de manera que la nova curvatura escalar és $\bar{R} = 1$. Amb aquests límits obtindrem uns models locals que, per l'equació anterior, compliran la cota de curvatura $1 \geq \bar{\alpha}_i \geq 0$.

5.2 Primers resultats de Hamilton sobre el flux

Els anys 1982 i 1986 Hamilton publicà els articles [12, 13] en els quals introduí el flux. Els principis del màxim ja hi tenen un paper important.

18 TEOREMA (HAMILTON 1982) *Si una varietat compacta tridimensional M admet una mètrica amb $\text{Ric} > 0$, aleshores el flux de Hamilton-Ricci convergeix, després d'homotècia, cap a una mètrica de curvatura seccional positiva.*

Si s'aplica el principi fort del màxim per tensors, s'ha de considerar que en algunes o en totes les direccions tinguin curvatura de Ricci estrictament positiva o bé zero.

19 TEOREMA (HAMILTON 1986) *Si una varietat compacta tridimensional M admet una mètrica amb $\text{Ric} \geq 0$, aleshores tenim tres possibilitats:*

1. *La mètrica és plana (curvatura constant zero).*
2. *$\text{Ric} > 0$ per a $t > 0$ i, per tant, el flux convergeix a una mètrica de curvatura constant positiva, després de renormalitzar-la.*
3. *La mètrica és localment un producte $g = g_1 + dx^3$. En aquest cas la varietat és $S^2 \times S^1$ o un quocient seu compatible amb el producte.*

En conclusió, l'any 1986 Hamilton havia demostrat que una varietat tridimensional que admet una mètrica amb $\text{Ric} \geq 0$ compleix la conjectura de geometrització. Aquest fou el punt de partida per desenvolupar un programa per provar la conjectura de geometrització mitjançant el flux de Ricci. El comportament per mètriques en general és força més complex, i les singularitats presentaran una problemàtica que no es resoldrà fins als treballs de Perelman.

6 Singularitats del flux

Per estudiar les singularitats es fan explosions: és a dir, es fa una homotècia d'un factor que tendeix a infinit de manera que el límit sigui un nou flux,

que utilitzarem per estudiar la singularitat. Cal triar bé el factor d'homotècia, i l'elecció té a veure amb la curvatura, car primer de tot veurem que on es desenvolupa una singularitat, la curvatura escalar tendeix a infinit.

Escollim una successió de punts on la curvatura escalar R tendeixi a infinit, fem una homotècia per tenir $R = 1$ i prenem el límit. Per fer-ho ben fet, veurem les homotècies parabòliques, que són les que ens preserven el fet de ser solució del flux, i un teorema de compacitat de fluxos. El problema principal serà controlar el radi d'injectivitat del punt base, i aquí és on entrarà la contribució de Perelman.

6.1 La curvatura controla les singularitats

20 TEOREMA (HAMILTON 1995, [15]) *Si el flux està definit en un interval de temps semiobert $[0, T)$ i la curvatura està uniformement acotada en aquest interval, aleshores es pot estendre l'interval de definició a $[0, T + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.*

Per justificar aquest teorema observem que la cota de la curvatura implica una cota de la curvatura de Ricci i, per tant, la derivada temporal del tensor mètric $\frac{\partial g}{\partial t}$ està uniformement acotada. La curvatura mateix controla les derivades espacials de la mètrica, i raonaments estàndard sobre límits de varietats de Riemann ens permeten estendre la solució a l'interval tancat $[0, T]$. L'existència local ens dona $[0, T + \varepsilon)$.

En conclusió, quan tenim una *singularitat del flux en un temps T* (és a dir, quan $[0, T)$ és un interval màxim de definició), aleshores

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup_{x \in M} \|\sec(x, t)\| = +\infty,$$

on $\|\sec(x, t)\|$ denota la norma de la curvatura seccional en $x \in M$ en el temps t .

En el cas tridimensional, però, per les estimacions de Hamilton-Ivey (corol·lari 17 [15, 16]) la curvatura escalar ens dona tot el control:

21 TEOREMA *Sigui M una varietat tridimensional. Suposem que $[0, T)$ és un interval de definició maximal, amb $T > 0$. Aleshores*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup_{x \in M} R(x, t) = \infty,$$

on $R(x, t)$ és la curvatura escalar en $x \in M$ en el temps t .

OBSERVACIÓ Aquest teorema també és cert sense suposar que M sigui una varietat completa, la qual cosa ens permet localitzar les singularitats als punts on $R \rightarrow \infty$.

6.2 Homotècies parabòliques

Per analitzar les singularitats, hem de fer una homotècia en les direccions temporals i espacials alhora, per tal de seguir tenint una solució del flux.

22 DEFINICIÓ Una *homotècia parabòlica* de les mètriques $g(t)$ que evolucionen per $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \text{Ric}$ és

$$\tilde{g}(\tilde{t}) = \lambda g(\tilde{t}/\lambda),$$

per cert, $\lambda > 0$. És a dir, multipliquem el temps per un factor λ ($\tilde{t} = \lambda t$) i la distància per $\sqrt{\lambda}$.

El tensor de Ricci és invariant per a homotècies, per tant, *després de fer una homotècia parabòlica, la família de mètriques segueix satisfent l'equació* $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \text{Ric}$.

6.3 Un teorema de compacitat per fluxos

Un *flux marcat* és $(M, g(t), x)$, $x \in M$ i $g(t)$ una mètrica en M que evoluciona pel flux de Ricci en un interval de temps.

En els enunciats següents suposarem que (a, b) és un interval de temps, possiblement infinit, que conté 0 (per simplificar la notació suposarem que $t = 0$ és el temps de referència).

23 DEFINICIÓ Diem que una successió de fluxos marcats $(M_k, g_k(t), x_k)$ definits per $t \in (a, b)$ convergeix a $(M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$ si:

- Existeix una successió d'oberts $U_k \subset M_\infty$ que contenen x_k i tals que qualsevol compacte de M_∞ està contingut en tots els U_k menys un nombre finit.
- Existeix una successió de difeomorfismes $\Psi_k: U_k \rightarrow V_k \subset M_k$ que porten x_∞ a x_k i els tensors $\Psi_k^*g_k$ convergeixen a g_∞ uniformement en tot compacte de $M_\infty \times (a, b)$, així com totes les seves derivades espacials i temporals.

Observem que permetem que la varietat canviï. Típicament, quan prenem un límit d'una explosió, obtenim una varietat no compacta.

24 TEOREMA (HAMILTON 1995, [14]) *Sigui $(M_k, g_k(t), x_k)$ una successió de fluxos marcats en l'interval de temps donat (a, b) , $a < 0 < b$. Suposem que:*

- *Per a tot $r > 0$ i tot interval compacte de temps $0 \in I \subset (a, b)$, la curvatura de $B(x_k, r)$ per la mètrica $g_k(t)$ i $t \in I$ està acotada uniformement respecte a k i $t \in I$.*
- *El radi d'injectivitat de x_k per $g_k(0)$ està uniformement minorat per una constant positiva.*

Aleshores una successió parcial de $(M_k, g_k(t), x_k)$ convergeix a un flux.

La idea de la demostració consisteix a aplicar els teoremes clàssics de convergència per geometria riemanniana per al temps base $t = 0$. Els «efectes regularitzadors del flux de Ricci» [36] ens permeten controlar les derivades de $g_k(0)$ i obtenir un límit tan regular com vulguem. De fet, amb les mateixes tècniques obtenim que $g_k(t)$ és equicontínua i acotada.

6.4 Explosions

Les explosions s'utilitzen per estudiar què passa quan tenim una singularitat que es desenvolupa en temps T en un flux de Ricci (M, g) . Escollim una successió $x_i \in M$ i $t_i \rightarrow T$ tal que $R(x_i, t_i) = \max_{x \in M} R(x, t_i)$, i fem una translació en el temps tal que t_i passi a ser zero. A més fem una homotècia parabòlica de manera que la nova curvatura escalar en x_i sigui 0. És a dir, substituïm $g(t)$ per

$$\tilde{g}_i(t) = \frac{1}{Q_i} g(Q_i(\tilde{t} + t_i)), \quad \text{on } Q_i = R(x_i, t_i).$$

Per analitzar la singularitat, estudiem la successió de fluxos marcats:

$$(M, \tilde{g}_i, x_i).$$

Aquesta successió té una parcial convergent. Per aplicar el teorema de compacitat (teorema 24), necessitariem saber que el punt base per la nova mètrica té radi d'injectivitat acotat lluny de zero. Aquesta dificultat és la que Perelman va resoldre amb la noció de κ -enfonsament de la qual parlarem més endavant. Suposem de moment que tenim la cota inferior positiva del radi d'injectivitat pel punt base x_i amb la mètrica $\tilde{g}_i(0)$, aleshores tenim una parcial convergent i el límit és un flux $(M_\infty, g_\infty(t), x_\infty)$ amb les propietats següents:

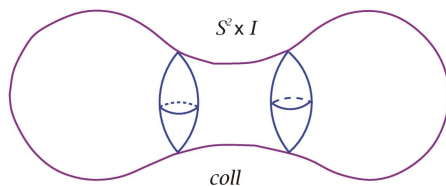
- El temps de definició conté $(-\infty, 0]$.
- La mètrica és completa en tot temps.
- La curvatura seccional és positiva o nul·la en tot temps.
- $R > 0$.

La primera propietat ve d'analitzar el temps de definició de la successió, i la tercera, de les estimacions de Hamilton-Ivey (corol·lari 17). El fet que $R > 0$ ve pel fet que la curvatura és no negativa, que $R = 1$ en un punt i del principi fort del màxim.

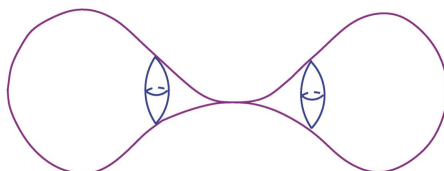
Aquestes solucions ens serviran de model per estudiar les singularitats. Observem que, entre les solucions que tenen les propietats anteriors, hi ha l'esfera, el cilindre i el producte del cigar per \mathbf{R} . L'esfera i el cilindre són models que ens convenen, perquè si tenim una esfera ja sabem quina varietat és, i si tenim un cilindre pot correspondre a una suma connexa, com mostra l'exemple següent. En canvi, el cigar per \mathbf{R} posa un problema, però la noció de κ -no enfonsament ens l'eliminarà.

EXEMPLE Apliquem el flux a l'esfera S^3 amb una mètrica que té un coll. Això vol dir que és una mètrica en la qual l'equador és molt més estret que els tròpics (cf. figura 8).

Veiem el coll com $S^2 \times I$, de manera que per a cada valor de $x \in I$ tenim una mètrica a l'esfera $S^2 \times \{x\}$. Escollim una mètrica tal que l'esfera del centre tingui un diàmetre molt més petit que les esferes de la vora del coll. Si a més escollim la longitud de l'interval molt llarga, això es pot fer de tal manera que el diàmetre de l'esfera del centre tendeixi a zero abans, atès que un diàmetre

FIGURA 8: S^3 amb un coll.

molt petit correspon a molta curvatura seccional, i com que l'interval és molt llarg, en les altres direccions gairebé no hi ha curvatura [1]. Això s'anomena una *punxada* (figura 9).

FIGURA 9: S^3 punxada.

Si escollim una successió de temps t_i que convergeix al temps de la punxada i un punt x_i de l'equador, és a dir, en el punt de màxima curvatura escalar $Q_i = R(x_i, t_i)$, aleshores l'explosió corresponent (és a dir, la successió de fluxos amb punt base $(S^3, \frac{1}{Q_i}g(Q_i(t + t_i)), x_i)$, on $Q_i = R(x_i, t_i)$) tendeix a un cilindre definit en temps $(-\infty, 0]$.

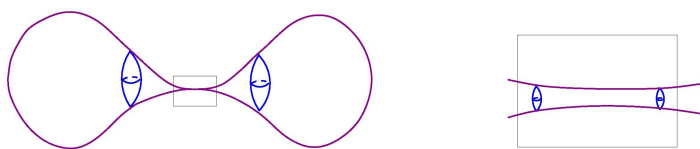


FIGURA 10: L'explosió de la singularitat ens fa un zoom just abans de la singularitat.

7 Els funcionals de Perelman

Quan un flux és el gradient d'un determinat funcional tenim més eines per estudiar-lo (per exemple, si el funcional es monòton). El flux de Ricci no és

el gradient de cap funcional de l'espai de mètriques (cf. [26]) però una de les primeres contribucions originals de Perelman [28] va ser presentar el flux com si fos un flux gradient, considerant l'espai adequat.

Més concretament, donada una varietat de Riemann (M, g) i una funció diferenciable $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, definim el funcional:

$$\mathcal{F}(g, f) = \int (R + |\nabla f|^2) e^{-f} d \text{vol}.$$

Si ens limitem al conjunt de mètriques g i funcions f tals que $\int e^{-f} d \text{vol} = 1$, el gradient del funcional \mathcal{F} ens indueix les equacions:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} + \text{Hess}(f)) \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -R + \Delta f.$$

Canviem la mètrica $g(t)$ per una família de difeomorfismes, és a dir, $\tilde{g}(t) = \phi(t)^* g(t)$, on $\phi(t)$ és el grup d'un paràmetre que surt d'integrar el gradient ∇f . Les equacions esdevenen:

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = -2 \text{Ric} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -R + \Delta f + |\nabla f|^2.$$

Aquestes equacions en general no tenen solució, atès que l'equació de f és una equació de la calor retrògrada (amb el temps canviat de sentit). Sí que ens serveix, però, per estudiar el flux de Ricci: si tenim una solució en un interval $[0, T]$, resollem l'equació enrere a partir del temps T , i donem condicions finals en lloc d'inicials per a f . El funcional \mathcal{F} és monòton per a una família $(g(t), f(t))$ que compleix les equacions anteriors, i fins i tot estrictament monòton, excepte quan es compleix $\text{Ric} + \text{Hess}(f) = 0$, que és l'equació del solità gradient estàtic.

Perelman introdueix molts altres funcionals a partir d'aquest. En aquest article no hi ha prou lloc per exposar-los, per la qual cosa recomano referències al lector interessat: l'article original [28], les notes sobre la demostració global [20], [24] i [6], i el llibre [26].

Aquest i altres funcionals serveixen per demostrar els resultats següents.

8 Els κ -enfossaments de Perelman

25 DEFINICIÓ Diem que una varietat de Riemann (M^3, g) és κ -no enfonsada a l'escala $r_0 > 0$ si per a tot radi $r_0 \geq r > 0$ tal que $|\text{sec}| \leq r^{-2}$ en tot punt de $B(x, r)$, es compleix

$$\frac{\text{vol}(B(x, r))}{r^3} \geq \kappa.$$

Per entendre aquesta definició, i en particular per què es diu *no enfonsada*, cal tenir en compte que les *desigualtats són invariants per homotècies*: si fem una dilatació de factor $\lambda > 0$, les distàncies (en particular el radi r) es multipliquen per λ , el volum per λ^3 i la curvatura seccional per λ^{-2} . L'escala

correcta és $r \leq r_0$ màxim que compleix $|\sec| \leq r^{-2}$. Si fem una homotècia de factor $1/r$, llavors ens queda una bola de radi 1, $B(x, 1)$, amb $|\sec| \leq 1$ i volum $\text{vol}(B(x, 1)) \geq \kappa$. En curvatura acotada, el lema 6 ens diu que el radi d'injectivitat a $B(x, 1)$ està acotat inferiorment lluny de zero. En resum:

Si fem una homotècia tal que la curvatura està acotada en una bola de radi 1, aleshores el radi d'injectivitat està minorat lluny de zero.

Enunciem un resultat de Perelman sobre la no existència dels κ -enfonsaments en el flux. Aquest resultat és el que ens garantirà que el radi d'injectivitat està minorat, si treballem a una escala en la qual la curvatura estigui acotada.

26 TEOREMA (PERELMAN 2002) *Donada una varietat riemanniana $(M^n, g(0))$ de dimensió n , existeixen un $\kappa > 0$ i un $r_0 > 0$ amb la propietat següent. Suposem que la mètrica $g(t)$ evoluciona pel flux de Ricci en l'interval $[0, T)$. Aleshores per a tot temps $t \in [1, t)$, $(M, g(t))$ és κ -no enfonsada a escala menor que r_0 .*

Observem que es demana que $t \geq 1$ (és a dir, que el flux de Ricci ha corregut durant un cert temps).

Recordem que la noció de κ -no enfonsament s'aplica quan fem una homotècia per la curvatura. La curvatura R pot ser arbitràriament gran, però quan $R \gg 0$ les curvatures seccional i escalar són comparables (corollari 17), i si normalitzem a $R = 1$ tindrem un bon model que ens descriu un entorn del punt.

Observem que la constant $\kappa > 0$ del teorema depèn de les condicions inicials (M, g_0) . Si es normalitzen les condicions inicials (en particular si la mètrica inicial (M, g_0) compleix $R \geq -1$, cosa fàcil de fer amb una primera homotècia), aleshores es pot trobar κ uniforme.

8.1 κ -solucions

Hem vist que per estudiar les singularitats del flux ens interessa mirar explosions. Quan fem les explosions, treballem amb una homotècia que ens garanteix curvatura acotada, i com hem dit abans, el teorema 26 ens garanteix que el radi d'injectivitat del punt base està minorat lluny de zero.

Això diu que podem aplicar el teorema 24 i trobar un límit, que tindrà les propietats que recull la definició següent:

27 DEFINICIÓ Una κ -solució és una solució al flux amb les propietats següents:

- El temps de definició conté $(-\infty, 0]$.
- La mètrica és completa en tot temps.
- La curvatura seccional és no negativa i acotada en tot temps.
- $R > 0$.
- κ -no enfonsada a totes les escales.

A la secció 6.4 hem justificat aquestes propietats, llevat del κ -enfonsament. Quan fem una explosió, com que abans de fer homotècies teníem κ -no enfonsament per a escales menors que r_0 , en fer les homotècies i prendre límits, l'escala tendeix a infinit.

Observem que el *producte del cigar* C amb \mathbf{R} és κ -enfonsat. Escollim una successió de punts $(x_i, 0) \in C \times \mathbf{R}$ que tendeixi a infinit. Com que la curvatura de x_i tendeix a zero i el radi d'injectivitat tendeix a 1, si normalitzem per tenir curvatura 1, aleshores el radi d'injectivitat tendeix a zero. Equivalentment, podem trobar una successió $r_i \rightarrow \infty$ tal que a la bola $B(x_i, r_i)$ la curvatura és menor que r_i^{-2} i, com que $\text{vol}(B(x_i, r_i))$ és de l'ordre de r_i^2 , $\text{vol}(B(x_i, r_i))/r_i^3$ tendeix a zero. Observem que l'escala d'enfonsament r_i tendeix a infinit.

En canvi, *el cilindre no és κ -enfonsat a cap escala*. Considerem $S^2(r_0)$ l'esfera de radi r_0 i el cilindre $S^2(r_0) \times \mathbf{R}$. Com que la curvatura seccional de l'esfera $S^2(r_0)$ és r_0^{-2} , la condició $\text{sec} \leq \frac{1}{r^2}$ no es compleix per a $r \geq r_0$, i fàcilment es troba una cota inferior per $\text{vol}B(x, r)/r^{-3}$ quan $r \leq r_0$.

Les κ -solucions ens donen informació sobre la singularitat i, tot i no estar completament determinades, se'n coneixen moltes propietats. De fet, a partir de les κ -solucions es pot provar un teorema d'estructura local (teorema 29 dels entorns canònics) per als punts on R és molt gran i, per tant, susceptibles d'esdevenir singularitats del flux.

L'espai de κ solucions, llevat d'homotècies, és compacte.

8.2 Entorns canònics

Les propietats de les κ -solucions, que són el resultat de fer explosions quan la curvatura tendeix a infinit, ens permetran donar entorns canònics quan la curvatura és molt gran. Abans, però, necessitem unes quantes definicions.

28 DEFINICIÓ Dues varietats de Riemann (M_1, g_1) i (M_2, g_2) són ε -properes si existeix un difeomorfisme $\varphi: M_2 \rightarrow M_1$ tal que φ^*g_1 i g_2 estan ε -a prop per la topologia $C^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Dit d'una altra manera, $|\varphi^*g_1 - g_2| < \varepsilon$ i $|\nabla^k \varphi^*g_1 - \nabla^k g_2| < \varepsilon$ per $k \leq \frac{1}{\varepsilon}$, on ∇^k denota la derivada covariant iterada d'ordre k .

La definició per a varietats riemannianes s'estén a fluxos, i no és més que dir que totes les seccions temporals són properes.

Definim un ε -entorn canònic com un entorn ε -proper a un dels següents:

- Un cilindre $S^2 \times (-1/\varepsilon, 1/\varepsilon)$ que evoluciona en temps $[-\frac{1}{\varepsilon}, 0]$ i en $t = 0$ té $R = 1$, llevat homotècia parabòlica.
- Una bola oberta amb un final cilíndric com la secció en temps zero de a) (anomenat *caputxa*), cf. figura 11.
- Una varietat difeomorfa a l'esfera S^3 o l'espai projectiu \mathbf{RP}^3 .
- Una varietat de curvatura seccional positiva.

A més, la definició requereix propietats mètriques, que no especifiquem aquí, però que essencialment consisteixen a dir que si normalitzem per tenir $R = 1$

en un punt del model local, aleshores tenim cotes uniformes per a la nova curvatura escalar, les derivades temporals i espacials de la curvatura escalar, i el diàmetre.

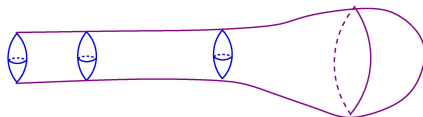


FIGURA 11: Una caputxa.

29 TEOREMA (PERELMAN 2003) *Donada una varietat (M, g_0) existeixen $r > 0$ i $\varepsilon > 0$ amb la propietat següent.*

Si $t > 1$ i $x \in (M, g_t)$ satisfà $R(x) \geq \frac{1}{r^2}$, aleshores x pertany a un entorn canònic.

Aquest teorema utilitza les propietats de les κ -solucions, perquè els punts que tenen molta curvatura n'estan a prop.

Volem utilitzar els entorns canònics de tipus *a)* per descompondre en suma connexa la varietat. D'aquesta operació en diem *cirurgia*, i en la propera subsecció ho fem analitzant globalment tota la varietat.

9 Flux amb cirurgia

Sigui (M, g_t) una família de mètriques que evoluciona pel flux de Ricci en un interval de temps $[0, T)$, amb T maximal. Denotem $R(x, t)$ la curvatura escalar de x per la mètrica $g(t)$. Tenint present el teorema 29 definim:

$$\Omega_\rho = \{x \in M \mid R(x, t) \leq \frac{1}{\rho^2} \text{ quan } t \rightarrow T\}.$$

i $\Omega = \bigcup_{\rho > 0} \Omega_\rho$. Pel teorema 24, a Ω tenim una mètrica límit, però $M \setminus \Omega$ pot ser un conjunt força salvatge.

Si $t \approx T$, cada punt de $M \setminus \Omega$ té un entorn canònic com al teorema 29. Utilitzant les propietats mètriques d'aquests entorns podem demostrar:

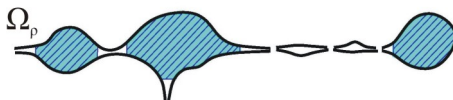


FIGURA 12: Pel teorema 30, el complement de Ω_ρ té una topologia senzilla.

30 TEOREMA (PERELMAN 2003) *Existeix un $\delta_0 > 0$ tal que si $0 < \delta < \delta_0$ i $\rho = r\delta$, aleshores $M \setminus \Omega_\rho$ és difeomorfa a una unió finita de cilindres, caputxes o varietats amb curvatura positiva. A més, els punts de la vora de Ω_ρ són el centre de cilindres $S^2 \times (-1/\delta, 1/\delta)$.*

No suposem que la varietat sigui connexa, perquè pot ser que després de la cirurgia es creïn nous components, per tant, alguns components poden ser varietats de curvatura positiva (i, per tant, geomètriques).

Observem que el teorema 30 ens permet tallar al llarg d'esferes de manera que controlem topològicament el complement de Ω_ρ ; a més controlem mètricament la vora de Ω_ρ . Realitzem, doncs, la cirurgia, que topològicament consisteix a enganxar boles a la vora de Ω_ρ . Mètricament, enganxem la unió d'un cilindre molt llarg amb la bola unitat:

$$S^2 \times [0, 10] \cup B^3,$$

on $S^2 \times \{10\}$ s'identifica amb ∂B^3 (figura 13). Regularitzem la mètrica a la vora de $S^2 \times \{10\} = \partial B^3$ sense canviar gaire les cotes de la curvatura i fem una homotècia de factor ρ , per tenir el mateix diàmetre que les esferes de $\partial\Omega_\rho$.



FIGURA 13: El tros que afegim a la cirurgia.

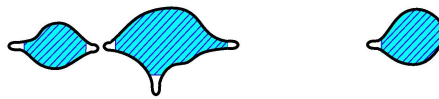


FIGURA 14: La varietat després de fer cirurgia (cf. figura 12).

La idea ara és continuar el flux i demostrar una versió per al flux amb cirurgia dels resultats que hem utilitzat per al flux sense cirurgia, per poder iterar el procés. No el descriurem en detall sinó que en farem unes quantes observacions rellevants:

1. Pot haver-hi una infinitat de temps de cirurgia, però no poden acumular-se, per una qüestió de volum. Més concretament, el creixement del volum de la varietat segueix la fórmula:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = - \int_M R.$$

Com que el mínim de la curvatura escalar és creixent, el creixement del volum de $(M, g(t))$ està controlat. D'altra banda, es pot calcular el volum que es perd a cada cirurgia, i la conclusió és que amb un nombre prou gran de cirurgies en un interval de temps acotat el volum esdevindria zero.

2. Les constants δ i r de la cirurgia varien, perquè després d'aplicar la cirurgia tornem a fer córrer el flux però amb condicions inicials diferents. De fet, cal veure que per a qualsevol interval de temps finit, podem trobar unes constants positives per les quals s'apliquen els resultats anteriors.
3. L'elecció de paràmetres δ i r influeix en el flux, per tant, no tenim unicitat!
4. La cirurgia es fa al llarg d'esferes mètriques, que topològicament poden ser trivials (figura 15).
5. Un cop controlem els paràmetres, podem continuar després de cada cirurgia, sempre que Ω_ρ no sigui buit.

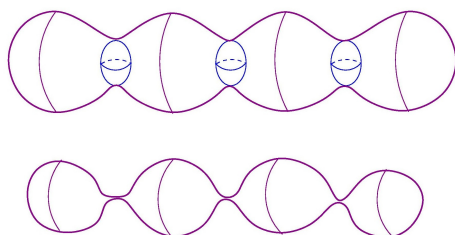


FIGURA 15: Sumes connexes topològicament trivials produïdes pel flux.

9.1 Comportament a llarg termini

Convenim que el flux s'atura quan a l'hora de fer alguna cirurgia tenim $\Omega_\rho = \emptyset$. En aquest cas, pel teorema 30, la varietat és suma connexa de varietats de curvatura constant 1 i de $S^2 \times S^1$. En particular satisfà la conjectura de geometrització.

Suposem, doncs, que el flux es pot continuar durant un temps infinit. Denotem M_t la varietat en el temps t , que pot haver canviat topològicament per culpa de la cirurgia.

Volem descompondre la varietat en una part hiperbòlica i en una part de Seifert. Si mirem el teorema de Cheeger i Gromov (teorema 7), la part de Seifert hauria de correspondre a una part amb radi d'injectivitat petit respecte a la curvatura (part prima). El lema de Margulis (teorema 9) ens assegura que les varietats hiperbòliques tenen radi d'injectivitat uniformement minorat (part gruixuda).

Per a temps t molt grans, volem descompondre la varietat en part prima i part gruixuda. Cal utilitzar com sempre definicions que siguin invariants per a homotècies.

Per a cada temps $t \gg 1$ definim $\eta(x, t)$ com el suprem

$$\eta(x, t) = \sup\{r > 0 \mid \text{la bola } B(x, r) \subset M_t \text{ té curvatura } \geq \frac{1}{r^2}\}.$$

Fixem una constant $\omega > 0$. Direm que $x \in M_t^-(\omega)$ si

$$\text{vol}(B(x, \eta(x, t))) \leq \omega \eta(x, t)^3.$$

31 DEFINICIÓ Anomenem $M_t^-(\omega)$ la part ω -prima i $M_t^+(\omega) = M \setminus M_t^-(\omega)$ la part ω -gruixuda.

Perelman demostra que, per a tot $\omega > 0$, la part ω -gruixuda esdevé estable (no afectada per cirurgies a llarg termini) i de curvatura asimptòticament constant (llevat d'homotècies). En aquest cas el flux homogeneïtza aquesta part de la varietat sense cap singularitat. Es pot veure fàcilment que la curvatura límit, després de fer una homotècia de factor \sqrt{t} tendeix a una constant negativa (si fos positiva, el flux no podria continuar fins a infinit). Aquest paràmetre \sqrt{t} és el mateix que apareixeria si apliquéssim el flux a una varietat de curvatura constant -1 (cf. el primer exemple de 4.4).

9.2 Enfonsaments

La part prima hauria de ser una varietat de Waldhausen (unió de varietats de Seifert), de manera anàloga a la teoria de Cheeger i Gromov. Observem que la teoria de Cheeger i Gromov no es pot aplicar, perquè no tenim una cota superior de la curvatura.

En aquest punt ens hem de referir a un article de Shioya i Yamaguchi [37], on demostren que la part prima és de Waldhausen. La seva demostració utilitza resultats sobre els espais d'Alexandrov, que són espais mètrics que satisfan les mateixes propietats de distància que les varietats de Riemann amb una cota inferior de curvatura. Malauradament, la seva demostració utilitza altres resultats no publicats de Perelman, de difícil comprensió, a més de generalitzacions dels mateixos resultats de Shioya i Yamaguchi.

Per aquest motiu treballa en una demostració més elemental, que no utilitza resultats tan complicats però que només s'aplica si la varietat té grup fonamental infinit. Això és suficient, perquè la secció següent explica que no cal estudiar el comportament a llarg termini quan el grup és finit.

9.3 Drecera per Poincaré

Perelman va escriure un tercer article [29] on prova que per la conjectura de Poincaré no cal el comportament a llarg termini.

32 TEOREMA (PERELMAN 2003) *Si la varietat inicial té grup fonamental finit o trivial, aleshores el flux amb cirurgia s'atura en un temps finit.*

Recordem que el flux s'atura quan $\Omega_\rho = \emptyset$.

Tot i que Perelman va donar una demostració amb llaços, seguirem l'aproximació de Colding i Minicozzi [10] amb aplicacions de l'esfera. Ambdues demostracions utilitzen que si $\pi_1(M)$ és finit aleshores $\pi_3(M) \neq 0$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓ. Considerem l'espai d'aplicacions contínues $S^2 \rightarrow M^3$ que tenen diferencial amb quadrat integrable:

$$\Theta := L_1^2(S^2, M^3) \cap C^0.$$

Observem que, mitjançant l'aplicació constant, podem veure M com un subconjunt de Θ : a cada $x \in M^3$ li fem correspondre l'aplicació que envia tot S^2 a x . Per tant, té sentit considerar el grup fonamental relatiu:

$$\pi_1(\Theta, M^3),$$

que és el conjunt de classes d'homotopia d'aplicacions de l'interval $[0, 1]$ en Θ , tal que els extrems estan a M^3 (és a dir, són aplicacions constants).

Com que el grup fonamental de M^3 és trivial o finit, el teorema de Hurewicz aplicat al seu recobridor universal ens diu que $\pi_3(M^3) \cong \mathbf{Z}$. Observem que això implica que $\pi_1(\Theta, \Omega) \neq 0$, perquè si tenim una aplicació $f: S^3 \rightarrow M$ que no és homotòpicament trivial, i suposem que f és de classe C^2 , aleshores considerem la funció altura sobre $S^3 \subset \mathbf{R}^4$, que és una funció de Morse, i els seus conjunts de nivell són una família d'esferes S^2 , llevat dels extrems que són un punt (figura 16). Això ens dona de manera natural un camí a Θ parametritzat per la funció altura que té extrems a $M \subset \Theta$, i es pot veure que és un element no trivial de $\pi_1(\Theta, M^3)$, perquè prové d'un element no trivial de $\pi_3(M^3)$.

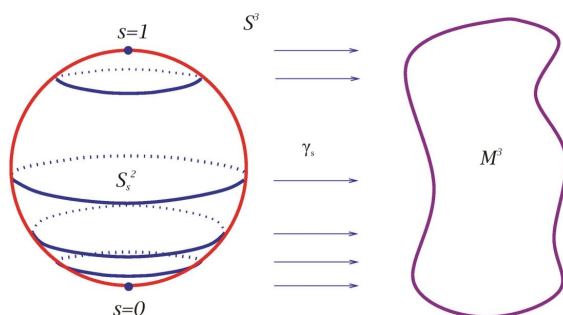


FIGURA 16: Construcció del camí a Ω .

Denotem $\theta \in \pi_1(\Theta, M)$ un element no trivial, Colding i Minicozzi defineixen:

$$W(g, \theta) = \min_{\gamma \in \theta} \max_{s \in [0,1]} E(\gamma_s) > 0, \quad \text{on } E(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_{S^2} \|d\gamma_s\|^2 d\mu_{S^2}.$$

És a dir, donat un camí a Ω amb extrems a M^3 , consideren el màxim de l'energia pels diferents valors del paràmetre $s \in [0, 1]$. Després agafen el mínim per a tots els camins que representen la classe de θ .

Un teorema de Jost [19] assegura que $W(g, \theta) > 0$ per a $\theta \in \pi_1(\Theta, \Omega)$ no trivial. Colding i Minicozzi demostren que, per a una mètrica que evoluciona segons el flux, es compleix:

$$\frac{d}{dt}W(g(t), \theta) \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)}W(g(t), \theta),$$

que se li pot donar un sentit fins i tot quan no és derivable (cal tenir en compte que hi poden haver cirurgies).

Aquesta desigualtat implica que un temps finit t_0 , $W(g(t_0), \theta) = 0$. Com que això contradiu que $W(g, \theta) > 0$, l'única possibilitat és que el flux no estigui definit en temps t_0 .

Agraïments

La meua recerca està finançada pel projecte FEDER/MEC MTM2006-04353. Vull expressar el meu agraïment a totes les persones que han tingut la paciència d'explicar-me coses sobre el flux: L. Bessières, G. Besson, E. Cabezas, C. Curràs, J. Dinkelbach, B. Leeb, S. Maillot, E. Miranda, I. Mundet, M. Nicolau, V. Miquel i H. Weiss. També vull agrair a Víctor Mañosa els seus consells sobre la redacció.

Referències

- [1] ANGENENT, S.; KNOPF, D. «An example of neckpinching for Ricci flow on S^{n+1} ». *Math. Res. Lett.*, 11 (4) (2004), 493-518.
- [2] BESSON, G. «Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de ricci [d'après g. perel'man]». *Astérisque*, (307) (2006), Exp. No. 947, 309-347. Séminaire Bourbaki, Vol. 2004/2005.
- [3] BIANCHI, L. «Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti». *Mem. Soc. Ital. Scienze*, 11 (3) (1897), 267-352.
- [4] BING, R. H. «Locally tame sets are tame». *Ann. of Math. (2)*, 59 (1954), 145-158.
- [5] CABEZAS RIVAS, E.; MIQUEL MOLINA, V. «The Hamilton-Perelman proof of the Poincaré and Thurston conjectures». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 9 (1) (2006), 15-42.
- [6] CAO, H.-D.; ZHU, X.-P. «A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures —application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow». *Asian J. Math.*, 10 (2) (2006), 165-492.
- [7] CHEEGER, J.; EBIN, D. G. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. Amsterdam: North-Holland, 1975. (North-Holland Mathematical Library; 9).

- [8] CHEEGER, J.; GROMOV, M. «Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. I». *J. Differential Geom.*, 23 (3) (1986), 309–346.
- [9] CHEEGER, J.; GROMOV, M. «Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. II». *J. Differential Geom.*, 32 (1) (1990), 269–298.
- [10] COLDING, T. H.; MINICOZZI, W. P. «Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman». *J. Amer. Math. Soc.*, 18 (3) (2005), 561–569. [Electrònic].
- [11] DETURCK, D. M. «Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors». *J. Differential Geom.*, 18 (1) (1983), 157–162.
- [12] HAMILTON, R. S. «Three-manifolds with positive Ricci curvature». *J. Differential Geom.*, 17 (2) (1982), 255–306.
- [13] HAMILTON, R. S. «Four-manifolds with positive curvature operator». *J. Differential Geom.*, 24 (2) (1986), 153–179.
- [14] HAMILTON, R. S. «A compactness property for solutions of the Ricci flow». *Amer. J. Math.*, 117 (3) (1995), 545–572.
- [15] HAMILTON, R. S., «The formation of singularities in the Ricci flow». A: *Surveys in differential geometry*. Vol. II. Cambridge: Int. Press, 1995, 7–136.
- [16] IVEY, T. «Ricci solitons on compact three-manifolds». *Differential Geom. Appl.*, 3 (4) (1993), 301–307.
- [17] JACO, W. H.; SHALEN, P. B. «Seifert fibered spaces in 3-manifolds». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21 (220) (1979), VIII + 192.
- [18] JOHANNSON, K. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*. Berlín: Springer, 1979. (Lecture Notes in Mathematics; 761).
- [19] JOST, J. *Two-dimensional geometric variational problems*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [20] KLEINER, B.; LOTT, J. *Notes on Perelman's papers*. [Preprint, math.DG/0605667.]
- [21] KNESER, H. «Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten». *Naturwissenschaften*, 16 (1928), 973.
- [22] MILNOR, J. «Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds». *Notices Amer. Math. Soc.*, 50 (10) (2003), 1226–1233.
- [23] MOISE, E. E. «Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung». *Ann. of Math. (2)*, 56 (1952), 96–114.
- [24] MORGAN, J.; TIAN, G. *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*. [Preprint, math.DG/0607607.]
- [25] MORGAN, J. W. «Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds». *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 42 (1) (2005), 57–78. [Electrònic].
- [26] MÜLLER, R. *Differential Harnack inequalities and the Ricci flow*. Zürich: European Mathematical Society, 2006. (Series of Lectures in Mathematics).
- [27] MUNKRES, J. «Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms». *Ann. of Math. (2)*, 72 (1960), 521–554.

- [28] PERELMAN, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. [Preprint, math.DG/0211159.]
- [29] PERELMAN, G. *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. [Preprint, math.DG/0307245.]
- [30] POINCARÉ, H. «Cinquième complément à l'analysis situs». *Palermo Rend.*, 18 (1904), 45-110.
- [31] PORTI, J. «Estructures geomètriques sobre varietats de dimensió tres». Primera Trobada Matemàtica de la SCM (Bellaterra, 1998). *Butl. Soc. Catalana Mat.*, 14 (1), (1999), 99-114.
- [32] RILEY, R. «A quadratic parabolic group». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77 (1975), 281-288.
- [33] SCOTT, P. «The geometries of 3-manifolds». *Bull. London Math. Soc.*, 15 (5) (1983), 401-487.
- [34] SEIFERT, H. «Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume». *Acta Math.*, 60 (1933), 147-238.
- [35] SHI, W.-X. «Deforming the metric on complete Riemannian manifolds». *J. Differential Geom.*, 30 (1) (1989), 223-301.
- [36] SHI, W.-X. «Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds». *J. Differential Geom.*, 30 (2) (1989), 303-394.
- [37] SHIOYA, T.; YAMAGUCHI, T. «Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound». *Math. Ann.*, 333 (1) (2005), 131-155.
- [38] THURSTON, W. P., *The geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton NJ: Princeton Math. Dept., 1979.
- [39] THURSTON, W. P., «Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry». *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, 6 (3) (1982), 357-381.
- [40] WALDHAUSEN, F. «Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I, II». *Invent. Math.*, 3 (1967), 308-333; *ibid.*, 4 (1967), 87-117.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 CERDANYOLA DEL VALLÈS
porti@mat.uab.cat

